BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang semiring, Aljabar *Max-Plus,* sifat-sifat Aljabar *Max-Plus*, matriks atas Aljabar *Max-Plus*, matriks dan graf, nilai eigen dan vektor eigen Aljabar *Max-Plus,* lampu lalu lintas, dan program *matlab* yang akan digunakan untuk pembahasan pada bab berikutnya.

A. Semiring

Ada beberapa konsep dasar yang perlu dijabarkan terlebih dahulu sebelum membahas tentang Aljabar *Max-Plus*. Konsep dasar ini akan digunakan untuk membahas sistem linear *Max-Plus* waktu-invariant. Konsep yang pertama yaitu semiring.

Definisi 2.1 Semiring (Subiono, 2013:2). *Suatu semiring* $(S,+,\times)$ *adalah suatu himpunan tak kosong S disertai dengan dua operasi biner + dan* $\times$ *, yang memenuhi aksioma berikut :*

1. *(S,+) merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu* $\forall x,y,z \in S$ *memenuhi :*
   i) $x+y=y+x$ *(komutatif terhadap penjumlahan)*
   ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$ *(assosiatif terhadap penjumlahan)*
   iii) $x+0=0+x=x$
2. $(S,\times)$ *adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu* $\forall x,y,z \in S$ *memenuhi :*
   i) $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$ *(assosiatif terhadap perkalian)*
   ii) $x\times 1=1\times x=x$
3. *Sifat penyerapan elemen netral 0 terhadap operasi* $'\times'$*, yaitu* $\forall x \in S$ *memenuhi :* $x\times 0=0\times x=0$
4. *Operasi* $'\times'$ *distributif terhadap* $'+'$*, yaitu* $\forall x,y,z \in S$ *berlaku :*
   $x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$
   $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$

Selanjutnya akan diberikan contoh untuk memperjelas Definisi 2.1 tentang semiring.

Contoh 2.1 (Lisapaly, 2011:45)

Diberikan R^0 adalah himpunan semua bilangan riil positif ditambah nol. Himpunan R^0 merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan bilangan riil biasa, sebab untuk setiap $x, y, z \in R^0$ berlaku:

i) $x + y = y + x$

$(x + y) + z = x + (y + z)$

$x + 0 = 0 + x = x$ dengan 0 merupakan elemen netral

ii) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

$x \times 1 = 1 \times x = x$ dengan 1 merupakan elemen satuan

iii) $x \times 0 = 0 \times x = 0$ dengan 0 merupakan elemen netral

iv) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

Bila suatu semiring $(S, +, \times)$ bersifat komutatif terhadap operasi $'\times'$, yaitu untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x \times y = y \times x$, maka $(S, +, \times)$ disebut semiring komutatif. Sedangkan bila suatu semiring $(S, +, \times)$ mempunyai sifat idempoten terhadap operasi $'+'$, yaitu untuk setiap $x \in S$ berlaku $x + x = x$, maka $(S, +, \times)$ disebut semiring idempoten (dioid). Himpunan pada Contoh 2.1 merupakan semiring komutatif karena $\forall x, y \in R^0$, berlaku $x \times y = y \times x$. Selanjutnya akan diberikan contoh semiring idempoten.

Contoh 2.2 (Rudhito, 2016:128)

Diberikan $\mathbb{R}_\varepsilon := \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = \infty$. Pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut :

$$x \oplus y := \min\{x, y\} \text{ dan } x \otimes y := x + y$$

Himpunan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus\ , \otimes)$ merupakan semiring sebab untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku:

i) $x \oplus y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \oplus x$

$(x \oplus y) \oplus z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, y, z\} = \min\{x, \min\{y, z\}\}$

$= x \oplus (y \oplus z)$

$x \oplus \varepsilon = \min\{x, \infty\} = \min\{\infty, x\} = \varepsilon \oplus x = x$

dengan $\varepsilon = \infty$ merupakan elemen netral

ii) $(x \otimes y) \otimes z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \otimes (y \otimes z)$

$x \otimes e = x + 0 = 0 + x = e \otimes x$

dengan $e = 0$ merupakan elemen satuan

iii) $x \otimes \varepsilon = x + \infty = \infty = \infty + x = \varepsilon \otimes x$

dengan $\varepsilon = \infty$ merupakan elemen netral

iv) $(x \oplus y) \otimes z = \min\{x, y\} + z = \min\{x + z, y + z\} = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

$x \otimes (y \oplus z) = x + \min\{y, z\} = \min\{x + y, x + z\} = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Semiring $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus\ , \otimes)$ merupakan semiring idempoten karena untuk setiap $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku $x \oplus x = \min\{x, x\} = x$.

Selain semiring komutatif dan idempoten, semiring ada yang merupakan semifield.

Definisi 2.2. Semifield (Subiono, 2013:3) *Suatu semiring* $(S,+,\times)$ *dinamakan semifield bila setiap elemen* x *di* $S \setminus \{0\}$ *mempunyai invers terhadap operasi* $'\times'$, *yaitu untuk setiap* x *di* $S \setminus \{0\}$ *ada* x^{-1} *sehingga* $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$

Semiring $(\mathrm{R}^0,+,\times)$ pada Contoh 2.1 merupakan semifield karena $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R}^0$ terdapat x^{-1} sehingga berlaku $\mathrm{x} \times \mathrm{x}^{-1} = \mathrm{x}^{-1} \times \mathrm{x} = 1$.

B. Aljabar *Max-Plus*

Aljabar adalah salah satu cabang besar dari ilmu matematika. Aljabar mempelajari tentang struktur, hubungan dan kuantitas. Pembelajaran dalam aljabar menggunakan simbol yang biasanya berupa huruf, huruf ini digunakan untuk mempresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dalam menyelesaikan masalah.

Ada banyak struktur aljabar, contohnya adalah Grup, Gelanggang, Semiring, Monoid, Semimodul $\mathbb{R}_{max}^n$, dan lain sebagainya. Salah satu contoh semiring yang komutatif dan idempoten adalah Aljabar *Max-Plus.*

Menurut Musthofa (2013:26), Aljabar *Max-Plus* adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dengan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan, yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$ dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Sehingga operasi pada Aljabar *Max-Plus* dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3. Operasi Aljabar Max-Plus (Olsder, 2005:5). *Untuk* $\mathbb{R}$ *himpunan semua bilangan real, diberikan* $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ *dengan* $\varepsilon \coloneqq -\infty$ *dan* $e \coloneqq 0$. *Untuk setiap* $x, y \in \mathbb{R}_{max}$, *didefinisikan operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *sebagai berikut :*

$$x \oplus y \coloneqq \max\{x, y\} \tag{2.1}$$

$$x \otimes y \coloneqq x + y \tag{2.2}$$

Berdasarkan Definisi 2.3 di atas, $\max\{x, -\infty\} = x$ dan $\max\{-\infty, x\} = x$ sehingga $\max\{x, -\infty\} = \max\{-\infty, x\} = x$, untuk suatu $x \in \mathbb{R}_{max}$ maka $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$. Nilai dari $x + 0 = x$ dan $0 + x = x$ sehingga $x + 0 = 0 + x = x$, untuk suatu $x \in \mathbb{R}_{max}$ maka $x \otimes 0 = 0 \otimes x = x$. Elemen nol untuk $\oplus$ dalam $\mathbb{R}_{max}$ dinyatakan dengan $\varepsilon \coloneqq -\infty$ dan elemen satuan untuk $\otimes$ dalam $\mathbb{R}_{max}$ dinyatakan dengan $e \coloneqq 0$. Uraian di atas membuktikan bahwa Aljabar *Max-Plus* merupakan semiring komutatif dan idempoten. Elemen-elemen $\mathbb{R}_{max}$ disebut juga dengan scalar. Operasi $\otimes$ dikerjakan lebih dahulu atas operasi $\oplus$.

Pangkat dalam Aljabar *Max-Plus* diperkenalkan dengan menggunakan sifat asosiatif. Himpunan bilangan asli digabung dengan bilangan nol dinotasikan oleh $\mathbb{N}$ dan didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ dan untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$, sehingga

$$x^{\otimes n} \coloneqq \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{n}$$

sedangkan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes n} \coloneqq e = 0$. Pada aljabar linier, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x^{\otimes n}$ dalam dibaca sebagai

$$x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{n} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = n \times x$$

Perhitungan pangkat ini juga dapat digunakan pada bilangan riil sehingga untuk $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku $x^{\otimes \alpha} = \alpha \times x$.

Penerapan Aljabar *Max-Plus* dalam berbagai bidang, misalnya dalam sistem transportasi, penjadwalan jalur bus dalam kota, optimasi produksi barang, analisis kedinamikaan sistem pada penjadwalan *flow shop*, dan lain-lain. Seperti ilmu-ilmu yang lain, Aljabar *Max-Plus* memiliki sifat-sifat operasi.

C. Sifat – Sifat Aljabar *Max-Plus*

Aljabar *Max-Plus* merupakan struktur aljabar. Sifat-sifat operasional Aljabar *Max-Plus* akan dijabarkan lebih lanjut dalam subbab ini. Menurut Olsder (2005:18), sifat-sifat aljabar linear yang berlaku dalam Aljabar *Max-Plus* adalah sebagai berikut:

1. Sifat Komutatif
   a. Komutatif terhadap $\oplus$

      $\forall x, y \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus y = y \oplus x.$

      Bukti :

      $x \oplus y = \max(x, y) = \max(y, x) = y \oplus x$

   b. Komutatif terhadap $\otimes$

      $\forall x, y \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes y = y \otimes x.$

      Bukti :

      $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$

2. Sifat Distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$

   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$.

   Bukti :

   $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes \max(y, z)$

   $= x + \max(y, z)$

   $= \max((x + y), (x + z))$

   $= \max((x \otimes y), (x \otimes z))$

   $= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

3. Adanya elemen nol (ε)

   $\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$.

   Bukti :

   $x \oplus \varepsilon = \max(x, -\infty) = x$

   $\varepsilon \oplus x = \max(-\infty, x) = x$

4. Adanya elemen satuan (e)

   $\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes e = e \otimes x = x$.

   Bukti :

   $x \otimes e = x + 0 = x$

   $e \otimes x = 0 + x = x$

5. Sifat Idempoten dari $\oplus$

   $\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus x = x$.

   Bukti :

   $x \oplus x = \max(x, x) = x$.

Aljabar *Max-Plus* juga memiliki sifat-sifat matriks atas Aljabar *Max-Plus* dan sistem persamaan linear atas Aljabar *Max-Plus*. Sifat-sifat ini akan dijabarkan dalam subbab selanjutnya.

D. Matriks Atas Aljabar *Max-Plus*

Pada subbab ini akan dijabarkan tentang matriks atas Aljabar *Max-Plus*. Menurut Olsder (2005:39), operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dalam Aljabar *Max-Plus* dapat diperluas untuk operasi matriks atas Aljabar *Max-Plus*. Himpunan matriks ukuran $m \times n$ dalam Aljabar *Max-Plus* dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{mxn}$. Untuk $m, n \in \mathbb{N}$, dengan $n \neq 0$ dan $m \neq 0$ didefinisikan $\bar{n} = \{1,2,3, \dots, n\}$ serta $\bar{m} = \{1,2,3, \dots, m\}$.

Elemen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$ dalam baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan a_{ij} , untuk $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$, atau elemen a_{ij} dapat ditulis sebagai $[A]_{ij}$ dengan $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$. Matriks *A* dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Menurut Gregoria (2011: 35), sifat penjumlahan matriks, perkalian skalar dan perkalian matriks dalam Aljabar *Max-Plus* adalah sebagai berikut :

1. Penjumlahan Matriks atas Aljabar *Max-Plus*

   Sifat operasi penjumlahan matriks atas Aljabar *Max-Plus* dinotasikan oleh $A \oplus B$ untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$ dan didefinisikan sebagai

   $[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j})$, untuk $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$.

   Contoh 2.3 (Gregoria, 2011:35) :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

Maka berdasarkan definisi penjumlahan matriks atas Aljabar *Max-Plus* dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[A \oplus B]_{1,1} = a_{1,1} \oplus b_{1,1} = 4 \oplus e = \max(4,0) = 4$$

$$[A \oplus B]_{1,2} = a_{1,2} \oplus b_{1,2} = 3 \oplus 7 = \max(3,7) = 7$$

$$[A \oplus B]_{2,1} = a_{2,1} \oplus b_{2,1} = \varepsilon \oplus 6 = \max(-\infty, 2) = 2$$

$$[A \oplus B]_{2,2} = a_{2,2} \oplus b_{2,2} = 6 \oplus 9 = \max(6,9) = 9$$

Jadi hasil dari $A \oplus B$ adalah

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} [A \oplus B]_{1,1} & [A \oplus B]_{1,2} \\ [A \oplus B]_{2,1} & [A \oplus B]_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Perkalian Skalar atas Aljabar *Max-Plus*

Sifat operasi perkalian skalar dalam matriks atas Aljabar *Max-Plus* dinotasikan oleh $\alpha \otimes A$ untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$ didefinisikan oleh $[\alpha \otimes A]_{i,j} = \alpha \otimes a_{i,j} = \alpha + a_{i,j}$, untuk $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$.

Contoh 2.4 (Gregoria, 2011:35) :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$ dan $C = 4$

Maka berdasarkan definisi perkalian skalar matriks atas Aljabar *Max-Plus* dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[\alpha \otimes A]_{1,1} = \alpha \otimes a_{1,1} = 4 \otimes 4 = 4 + 4 = 8$$

$$[\alpha \otimes A]_{1,2} = \alpha \otimes a_{1,2} = 4 \otimes 3 = 4 + 3 = 7$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,1} = \alpha \otimes a_{2,1} = 4 \otimes \varepsilon = 4 + (-\infty) = \varepsilon$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,2} = \alpha \otimes a_{2,2} = 4 \otimes 6 = 4 + 6 = 10$$

Jadi hasil dari $\alpha \otimes A$ adalah

$$\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} [\alpha \otimes A]_{1,1} & [\alpha \otimes A]_{1,2} \\ [\alpha \otimes A]_{2,1} & [\alpha \otimes A]_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ \varepsilon & 10 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks atas Aljabar *Max-Plus*

   Sifat operasi perkalian matriks atas Aljabar *Max-Plus* dinotasikan oleh $A \otimes B$ untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{max}^{mxl}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{lxn}$ didefinisikan sebagai :

   $[A \otimes B]_{i,l} = \bigoplus_{j=1}^{l} a_{i,j} \otimes b_{i,j} = \max_{j \in l} a_{i,j} + b_{j,l}$, untuk $i \in \overline{m}$ dan $j \in \overline{n}$.

   Perkalian matriks atas Aljabar *Max-Plus* serupa dengan perkalian matriks aljabar linear dengan + diganti dengan max dan × diganti dengan +.

   Contoh 2.5 (Gregoria, 2011:36) :

   Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

   Maka berdasarkan definisi perkalian matriks atas Aljabar *Max-Plus* dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[A \otimes B]_{1,1} = (4 \otimes e) \oplus (3 \otimes 2) = \max(4,5) = 4$$

$$[A \otimes B]_{1,2} = (4 \otimes 7) \oplus (3 \otimes 9) = \max(11,12) = 12$$

$$[A \otimes B]_{2,1} = (\varepsilon \otimes e) \oplus (6 \otimes 2) = \max(-\infty, 8) = 8$$

$$[A \otimes B]_{2,2} = (\varepsilon \otimes 7) \oplus (6 \otimes 9) = \max(-\infty, 15) = 15$$

   Jadi hasil dari $A \otimes B$ adalah

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} [A \oplus B]_{1,1} & [A \oplus B]_{1,2} \\ [A \oplus B]_{2,1} & [A \oplus B]_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Identitas atas Aljabar *Max-Plus*

   Dalam sistem Aljabar *Max-Plus* juga terdapat matriks identitas.

   Matriks atas Aljabar *Max-Plus* berukuran nxn dan dinotasikan sebagai E_n dan didefinisikan sebagai $[E_n]_{ij} = \begin{cases} e \text{ ,} jika\ i=j \\ \varepsilon \text{ ,} jika\ i \neq j \end{cases}$

Menurut Rudhito (2003: 11), operasi-operasi matriks Aljabar *Max-Plus* mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
2. $A \oplus B = B \oplus A$
3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
4. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
5. $(A \otimes B) C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
6. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha$
7. $(\alpha \otimes \beta) \otimes A = (\alpha \otimes \beta) \otimes A)$
8. $\alpha \otimes (A \otimes B) = (\alpha \otimes A) \otimes B = A \otimes (\alpha \otimes B)$
9. $(\alpha \oplus \beta) \otimes A = (\alpha \otimes A) \oplus (\beta \otimes A)$
10. $\alpha \otimes (A \oplus B) = (\alpha \otimes A) \oplus (\alpha \otimes A)$
11. $A \otimes A = A$

Bukti :

Bukti i), ii), v), vi), vii), viii), dan ix) mengikuti definisi operasi dan sifat-sifat operasi pada $\mathbb{R}_{max}$.

Bukti iii)

Ambil sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times p}, B \in \mathbb{R}_{max}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{R}_{max}^{q\times m}$. Elemen baris ke-i dan kolom ke-j matriks $(A \otimes B) \otimes C$ adalah

$$[(A \otimes B) \otimes C]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{q} \left(\bigoplus_{l=1}^{p} a_{i,l} \otimes b_{l,k} \right) \otimes C_{k,j}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{q} \bigoplus_{l=1}^{p} a_{i,l} \otimes b_{l,k} \otimes C_{k,j}$$

$$= \bigoplus_{l=1}^{p} a_{i,l} \otimes \left(\bigoplus_{k=1}^{q} b_{l,k} \right) \otimes c_{k,j})$$

$= [A \otimes (B \otimes C)]_{ij}$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Bukti iv)

Ambil sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times p}, dan\ B, C \in \mathbb{R}_{max}^{p\times m}$. Elemen baris ke-i dan kolom ke-j matriks $A \otimes (B \oplus C)$ adalah

$$[A \otimes (B \oplus C)]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes (b_{k,j} \otimes c_{k,j})$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{p} (a_{i,k} \otimes b_{k,j} \oplus a_{i,k} \otimes c_{k,j})$$

$$= \left(\bigoplus_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes b_{k,j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{p} (a_{i,k} \otimes c_{k,j}) \right)$$

$= [A \otimes B]_{ij} [A \otimes C]_{ij}$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

E. Matriks dan Graf

Menurut Subiono (2013:19), misalkan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, suatu graf berarah dari matriks A adalah $\mathcal{G}(A) = (E, V)$. Graf $\mathcal{G}(A)$ mempunyai n titik, himpunan semua titik dari $\mathcal{G}(A)$ dinyatakan oleh V. Suatu garis dari titik j ke titik i ada bila $a_{i,j} \neq \varepsilon$, garis ini dinotasikan oleh (j,i). Himpunan semua garis dari graf $\mathcal{G}(A)$ dinotasikan oleh E. Bobot dari garis (j,i) adalah nilai dari $a_{i,j}$ yang dinotasikan oleh $w(j,i) = a_{i,j} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Bila $a_{i,j} = \varepsilon$, maka garis (j,i) tidak ada. Suatu barisan garis $(i_1,i_2),(i_2,i_3),\dots,(i_{l-1},i_l)$ dari suatu graf dinamakan suatu path. Suatu path dikatakan elementer bila tidak ada titik terjadi dua kali dalam path tersebut. Suatu sirkuit adalah path elementer tertutup, yaitu $(i_1,i_2),(i_2,i_3),\dots,(i_{l-1},i_l)$. bobot dari suatu path $p = (i_1,i_2),(i_2,i_3),\dots,(i_{l-1},i_l)$ dinotasikan oleh $|p|_w$ dan diberikan oleh $|p|_w = w(i_1,i_2) + w(i_2,i_3) + \dots + w(i_{l-1},i_l) = \left(a_{i_2,i_1} + a_{i_3,i_2} + \dots + a_{i_l,i_{l-1}}\right)$, sedangkan panjang dari path p atau banyaknya garis dalam path p dinotasikan oleh $|p|_l$. Bobot rata-rata dari path p adalah bobot dari p dibagi oleh banyaknya garis dalam path p, yaitu

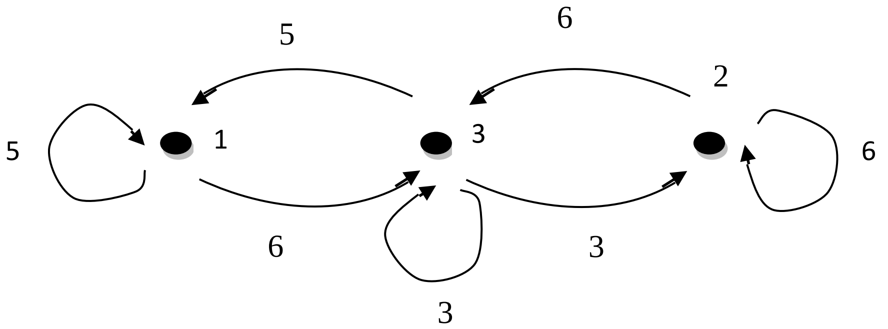
$$\frac{|p|_w}{|p|_l} = \frac{\left(a_{i_2,i_1} + a_{i_3,i_2} + \dots + a_{i_l,i_{l-1}}\right)}{(l-1)}$$

Sirkuit rata-rata adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan sirkuit kritis. Menurut Subiono (2013:19), suatu graf dikatakan terhubung kuat bila suatu path ada untuk setiap titik i ke setiap titik j. Bila graf $\mathcal{G}(A)$ adalah terhubung kuat, maka matriks A juga dikatakan irredusibel (tak tereduksi).

Selanjutnya akan diberikan contoh untuk menentukan sirkuit dalam graf.

Contoh 2.6 (Subiono, 2013:20)

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

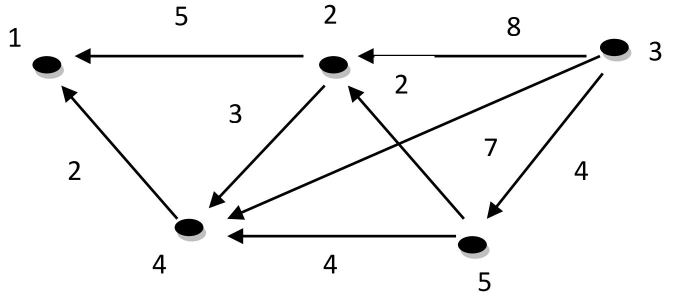


Gambar 2.1 Graf Matriks A

Dalam Gambar 2.1 Terdapat lima sirkuit yaitu $(1,1); (1,3), (3,1); (3,3); (2,3), (3,2);$ dan $(2,2)$. Masing-masing sirkuit mempunyai sirkuit rata-rata $\frac{5}{1} = 5, \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2}, \frac{3}{1} = 3, \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}, dan\, \frac{6}{1} = 6.$ Terlihat bahwa sirkuit rata-rata maksimum adalah 6 terjadi pada sirkuit $(2,2)$. Jadi sirkuit kritis dari graf $\mathcal{G}(A)$ adalah sirkuit $(2,2)$. Juga tampak bahwa graf $\mathcal{G}(A)$ adalah terhubung kuat. Jadi matriks A taktereduksi.

Contoh 2.7 (Subiono, 2013:21)

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 7 & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$



Gambar 2.2 Graf Matriks A

Dalam Gambar 2.2 terlihat bahwa graf $\mathcal{G}(A)$ tidak memuat satupun sirkuit, dengan demikian sirkuit rata-rata maksimum tidak ada. Perhatikan juga bahwa graf $\mathcal{G}(A)$ tidak terhubung kuat. Jadi matriks A tereduksi.

Sirkuit rata-rata maksimum dari suatu graf $\mathcal{G}(A)$ berkaitan dengan karakteristik dari matriks A. Untuk matriks A berukuran agak besar tentunya tidak mudah untuk mengecek graf $\mathcal{G}(A)$ mempunyai sirkuit atau tidak. Oleh karena itu akan dibahas tentang matriks pangkat. Untuk matriks persegi A berukuran $n \times n$, maka

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A$$

Elemen-elemen ke$-i, j$ dari A adalah $[A^2]_{i,j} = \max\{a_{i,k} + a_{ik,j}\}$ menyatakan bobot maksimum dari semua path dengan panjang 2 dari titik j ke titik i dalam graf $\mathcal{G}(A)$. Secara umum, $[A^{\otimes k}]_{i,j}$ adalah bobot maksimum dari semua path dengan panjang k dari titik j ke titik i dalam graf $\mathcal{G}(A)$. Sifat reduksi matriks ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4 (Rudhito: 2003). *Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dikatakan irredusibel jika graf presedennya terhubung kuat.*

Penentuan sifat reduksi suatu matriks didapatkan berdasarkan graf presedennya ini ada dalam teorema berikut.

Teorema 2.1 (Rudhito: 2003). *Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dikatakan irredusibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$, untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.*

Bukti :

$\Longrightarrow$

Berdasarkan Definisi 2.4, jika A irredusibel maka $\mathcal{G}(A)$ terhubung kuat, yaitu untuk setiap $i, j \in V$ terdapat suatu lintasan dari i ke j. Dengan demikian untuk $i, j \in V, i \neq j$ terdapat k dengan $1 \leq k \leq n-1$ sehingga $(A^{\otimes k})_{ij} \neq \varepsilon$. Akibatnya $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

$\Longleftarrow$

Jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$, terdapat k dengan $1 \leq k \leq n-1$ sehingga $(A^{\otimes k})_{ij} \neq \varepsilon$. Hal ini berarti bahwa graf preseden $\mathcal{G}(A)$ dengan $V = \{1,2, \ldots, n\}$ untuk setiap $i, j \in V, i \neq j$ terdapat suatu lintasan dari i ke j. Akibatnya graf $\mathcal{G}(A)$ terhubung kuat yang berarti bahwa matriks A irredusibel.

Selanjutnya akan diberikan contoh tentang matriks irredusibel.

Contoh 2.8 (Rudhito: 2003):

Diberikan matriks $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan apakah matriks tersebut irredusibel!

Jawab :

Matriks A irredusibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2})_{ij} \neq \varepsilon$

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,4,\varepsilon) & \max(3,5,\varepsilon) & \max(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(3,5,\varepsilon) & \max(4,6,\varepsilon) & \max(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(4,4,4) & \max(5,5,2) & \max(\varepsilon,\varepsilon,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & \varepsilon \\ 5 & 6 & \varepsilon \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \oplus A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ 2 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 5 & \varepsilon \\ 5 & 6 & \varepsilon \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(1,4) & \max(2,5) & \max(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(2,5) & \max(3,6) & \max(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \\ \max(3,4) & \max(2,5) & \max(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & \varepsilon \\ 5 & 6 & \varepsilon \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan $(A \oplus A^{\otimes 2})_{13} = \varepsilon$ dan $(A \oplus A^{\otimes 2})_{23} = \varepsilon$.

Jadi matriks A tidak irredusibel.

Contoh 2.9 (Rudhito: 2003):

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$, tentukan apakah matriks tersebut irredusibel!

Jawab :

Matriks A irredusibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2})_{ij} \neq \varepsilon$

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(8,\varepsilon,5) & \max(5,4,4) & \max(6,5,3) \\ \max(\varepsilon,\varepsilon,7) & \max(\varepsilon,6,6) & \max(\varepsilon,7,8) \\ \max(7,\varepsilon,\varepsilon) & \max(4,5,\varepsilon) & \max(5,6,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \oplus A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(4,8) & \max(1,5) & \max(2,6) \\ \max(\varepsilon,7) & \max(3,6) & \max(4,8) \\ \max(3,7) & \max(2,5) & \max(\varepsilon,6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

dengan $(A \oplus A^{\otimes 2})_{ij} \neq \varepsilon$.

Jadi matriks A irredusibel.

Setiap matriks atas Aljabar *Max-Plus* mempunyai nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Jika matriks atas Aljabar *Max-Plus* tersebut irredusibel, maka nilai eigennya tunggal (Andy Rudhito, 2003). Pemaparan tentang nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dalam Aljabar *Max-Plus* akan dijelaskan lebih lanjut pada subbab selanjutnya.

F. Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar *Max-Plus*

Seperti pada matriks real di aljabar linear, pada matriks di $\mathbb{R}_{max}$ dapat juga dipelajari konsep tentang nilai eigen dan vektor eigen. Pada subbab ini akan dijelaskan tentang konsep nilai eigen dan vektor eigen di $\mathbb{R}_{max}$ serta cara untuk menentukannya.

Menurut Subiono (2013:24), nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks bujursangkar A berukuran nxn sebagaimana dijumpai dalam aljabar linear juga dijumpai dalam Aljabar *Max-Plus*, yaitu bila diberikan suatu persamaan :

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \qquad (2.3)$$

Masing-masing vektor $x \in \mathbb{R}^n_{max}$ dinamakan vektor eigen dan $\lambda \in \mathbb{R}$ dinamakan nilai eigen dari matriks A dengan vektor $x \neq (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^t$. Persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai

$$\lambda \otimes x = A \otimes x$$

$$\lambda \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + \lambda \\ x_2 + \lambda \\ \vdots \\ x_n + \lambda \end{bmatrix} = A \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sehingga algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{nxn}$ dilakukan secara berulang dari bentuk persamaan linear

$$x(k+1) = A \otimes x(k)\ ,\ k = 0,1,2,.... \tag{2.4}$$

dengan $x(0)$ merupakan keadaan awal. Berdasarkan Persamaan (2.3) dapat ditentukan nilai $x(k)$ selanjutnya

$$x(1) = x(0) \oplus \lambda$$

$$x(2) = x(1) \oplus \lambda = x(1) = x(0) \oplus x(0) \oplus \lambda$$

$$\vdots$$

$$x(k) = x(k-1) \oplus \lambda = x(1) = x(0) \oplus x(0) \oplus \dots \oplus x(0) \oplus \lambda$$

Perilaku periodik dari Persamaan (2.4) baik untuk matriks A yang tak tereduksi maupun yang tereduksi erat kaitannya dengan apa yang dinamakan *vektor waktu sikel* yang didefinisikan sebagai :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x(k)}{k} \tag{2.5}$$

Limit ini ada untuk setiap keadaan awal $x \neq (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^t$ dan untuk matriks dalam Persamaan 2.4 yang tereduksi selalu bisa dijadikan suatu bentuk blok matriks segitiga atas, yang dapat dilihat seperti bentuk berikut.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \varepsilon & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \varepsilon & \varepsilon & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

dan untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$, $A_{i,i}$ adalah matriks tak tereduksi dengan nilai eigen λ_i. Dalam hal yang demikian *vektor waktu sikel* diberikan oleh

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \ldots \quad \lambda_n]^t$$

dengan $\lambda_i = [\lambda_i \quad \lambda_i \quad \ldots \quad \lambda_i]^t$ dan vektor λ_i berukuran $n \times 1$. Nilai eigen dari matriks persegi A diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2 (Subiono, 2013:25). *Bila untuk sebarang keadaan awal $x(0) \neq \varepsilon$ sistem Persamaan (2.5) memenuhi*

$$x(p) = c \otimes x(q) \qquad (2.6)$$

untuk beberapa bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ dan beberapa bilangan real c, maka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda \quad \lambda \quad \ldots \quad \lambda]^t \qquad (2.7)$$

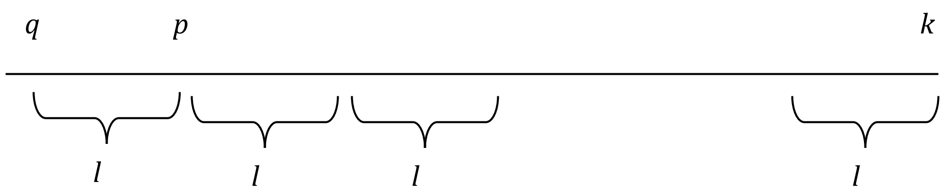
dengan $\lambda = \frac{c}{p-q}$. Selanjutnya λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \qquad (2.8)$$

Bukti :

Misalkan $l = p - q$

$p = q + l$



didapat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = \lim_{(n-1)\to\infty} \frac{x(q+(n-1)l)}{q+(n-1)l}$$

(untuk mempermudah perhitungan maka $(n-1) \to \infty$ diganti dengan $i \to \infty$)

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{x(q+il)}{q+il}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{c \otimes c \otimes c \otimes c \otimes \dots c \otimes x(q)}{q+il}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{c^{\otimes^i} \otimes x(q)}{q+il}$$

$$= \left(\lim_{i\to\infty} \frac{c^{\otimes^i}}{q+il}\right) \otimes \left(\lim_{i\to\infty} \frac{x(q)}{q+il}\right)$$

$$= \left(\lim_{i\to\infty} \frac{ic}{q+il}\right) \otimes \left(\lim_{i\to\infty} \frac{x(q)}{q+il}\right)$$

$$= \frac{c}{l} \otimes 0$$

$= \frac{c}{p-q} \otimes 0$ dengan vektor $0 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^t$

Jadi $\lambda = \frac{c}{p-q}$, sehingga *vektor waktu sikel* adalah

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda \quad \lambda \quad \dots \quad \lambda]^t$$

Selanjutnya bila

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)$$

sehingga

$$A \otimes v = A \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right) \right).$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p-q} A \otimes \left(\left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right) \right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes (A \otimes x(q+i-1))$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i)$$

$$= \bigoplus_{j=2}^{p-q+1} \lambda^{\otimes \otimes(p-q-j+1)} \otimes x(q+j+1)$$

$$= \lambda \otimes \bigoplus_{j=2}^{p-q+1} \lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes x(q+j-1)$$

$$= \lambda \otimes \bigoplus_{j=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+j-1)$$

$$= \lambda \otimes v$$

Persamaan terakhir yang diperoleh adalah

$$x(p) = \lambda^{\otimes(p-q)} \otimes x(q) \ ,$$

yang berakibat bahwa

$$\lambda^{\otimes -1} x(p) = \lambda^{\otimes(p-q-1)} \otimes x(q).$$

Selanjutnya akan diberikan contoh untuk menghitung nilai eigen dan vektor eigen.

Contoh 2.10 (Subiono, 2013:28):

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$ untuk $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $k = 0,1,2, \ldots$.

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A!

Jawab :

Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A dapat dicari dengan cara berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2, \dots$$

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan Persamaan (2.4)

$x(k+1) = A \otimes x(k)$, $\qquad k = 0,1,2, \dots.$

$k = 0$

$$x(0+1) = A \otimes x(0)$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(4,1,2) \\ \max(\varepsilon,3,4) \\ \max(3,2,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$k = 1$

$$x(1+1) = A \otimes x(1)$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ \varepsilon & 7 & 7 \\ 7 & 6 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(8,5,5) \\ \max(\varepsilon,7,7) \\ \max(7,6,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$k = 2$

$$x(2+1) = A \otimes x(2)$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 9 \\ \varepsilon & 10 & 11 \\ 11 & 9 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(12,8,9) \\ \max(\varepsilon,10,11) \\ \max(11,9,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$k = 3$

$$x(3+1) = A \otimes x(3)$$

$$x(4) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 3 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 13 \\ \varepsilon & 14 & 15 \\ 15 & 13 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(16,12,13) \\ \max(\varepsilon,14,15) \\ \max(15,13,\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya cek masing-masing hasil untuk menentukan koefisien c.

Koefisien c dapat dicari menggunakan cara berikut.

$$x(p) = c \otimes x(q)\,, \qquad p > q \geq 0$$

$$x(1) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = c \otimes x(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+4 \\ c+4 \\ c+3 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = c \otimes x(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+4 \\ c+4 \\ c+3 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = c \otimes x(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8 \\ 4+7 \\ 4+7 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+4 \\ c+4 \\ c+3 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = 8 \otimes \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+8 \\ 8+7 \\ 8+7 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(3) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} = 4 \otimes \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 12 \\ 4 + 11 \\ 4 + 11 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan, dapat dilihat adanya suatu periodesasi sehingga nilai eigen dan vektor eigen dapat ditentukan.

Nilai eigennya adalah

$$c = 4\,, p = 3\,, q = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{p - q} = \frac{4}{3 - 2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$c = 8\,, p = 4\,, q = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{8}{p - q} = \frac{8}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$c = 4\,, p = 4\,, q = 3 \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{p - q} = \frac{4}{4 - 3} = \frac{4}{1} = 4$$

Karena nilai eigen yang didapatkan sama sehingga untuk menghitung vektor eigen boleh memilih salah satu kombinasi nilai c, p dan q. Dalam penyelesaian ini dipilih $c = 4\,, p = 3\,, q = 2$.

Vektor eigennya adalah

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q + i - 1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{3-2} (4^{\otimes(3-2-1)} \otimes x(2 + 1 - 1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{1} (4^{\otimes 0} \otimes x(2))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{1} (0 \times 4 \otimes x(2))$$

$$v = max((0 \times 4) + x(2))$$

$$v = max(0 + x(2)$$

$$v = x(2)$$

Jadi nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 4$ dan vektor eigen dari matriks A adalah $v = x(2) = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Contoh 2.11 (Subiono, 2013:28): :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, untuk $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $k = 0,1,2, \ldots$.

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A!

Jawab :

Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A dapat dicari dengan cara berikut.

Matriks A yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad , \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Langkah selanjutnya adalah i menyelesaikan Persamaan (2.4)

$x(k+1) = A \otimes x(k) \;, \qquad k = 0,1,2, \ldots.$

$k = 0$

$$x(0+1) = A \otimes x(0)$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(2,4,5) \\ \max(3,1,8) \\ \max(2,6,9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$k = 1$

$$x(1+1) = A \otimes x(1)$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 14 \\ 8 & 9 & 17 \\ 7 & 14 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(7,12,14) \\ \max(8,9,17) \\ \max(7,14,18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$k = 2$

$$x(2+1) = A \otimes x(2)$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 23 \\ 17 & 18 & 26 \\ 16 & 23 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(16,21,23) \\ \max(17,18,26) \\ \max(16,23,27) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$k = 3$

$$x(3+1) = A \otimes x(3)$$

$$x(4) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 30 & 32 \\ 26 & 27 & 35 \\ 25 & 32 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(25,30,32) \\ \max(26,27,35) \\ \max(25,32,36) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya cek masing-masing hasil untuk menentukan koefisien *c*.

Koefisien *c* dapat dicari menggunakan cara berikut.

$$x(p) = c \otimes x(q), \qquad p > q \geq 0$$

$$x(1) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = c \otimes x(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = 9 \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+5 \\ 9+8 \\ 9+9 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = c \otimes x(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = 18 \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+5 \\ 18+8 \\ 18+9 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = c \otimes x(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} = 9 \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+14 \\ 9+17 \\ 9+18 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+0 \\ c+0 \\ c+0 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = 27 \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27+5 \\ 27+8 \\ 27+9 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = 18 \otimes \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18+14 \\ 18+17 \\ 18+18 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = c \otimes x(3) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = c \otimes \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix} = 9 \otimes \begin{bmatrix} 23 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 32 \\ 35 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+23 \\ 9+26 \\ 9+27 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan, dapat dilihat adanya suatu periodesasi , sehingga nilai eigen dan vektor eigen dapat ditentukan sebagai berikut :

Nilai eigennya adalah

$$c = 9 \,, p = 2 \,, q = 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{9}{2-1} = \frac{9}{1} = 9$$

$$c = 18\,, p = 3\,, q = 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{18}{3-1} = \frac{18}{2} = 9$$

$$c = 9\,, p = 3\,, q = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{9}{3-2} = \frac{9}{1} = 9$$

$\dots, dst$ (masih banyak kombinasi c, p dan q)

Karena nilai eigen yang didapatkan sama sehingga untuk menghitung vektor eigen boleh memilih salah satu kombinasi nilai c, p dan q. Dalam penyelesaian ini dipilih adalah $c = 9\,, p = 2$ dan $q = 1$.

Vektor eigennya adalah

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{2-1} (9^{\otimes(2-1-1)} \otimes x(1+1-1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{1} (9^{\otimes 0} \otimes x(1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{1} (0 \times 9 \otimes x(1))$$

$$v = max((0 \times 9) + x(1))$$

$$v = max(0 + x(1)$$

$$v = x(1)$$

Jadi nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 9$ dan vektor eigen dari matriks A adalah $v = x(1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian yang telah didapatkan ini selanjutnya akan digunakan dalam perhitungan pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas. Pembahasan tentang lampu lalu lintas ini akan dibahas pada subbab selanjutnya.

G. Lampu Lalu Lintas

1. Lalu Lintas

Lalu Lintas di dalam Undang-Undang No 22 Tahun 2009 tentang Lalu Lintas dan Angkutan Jalan Pasal 1 didefinisikan sebagai gerak kendaraan dan orang di ruang lalu lintas jalan.Sedang ruang lalu lintas jalan adalah prasarana yang diperuntukkan bagi gerak pindah kendaraan, orang, dan/atau barang yang berupa jalan dan fasilitas pendukung.

Menurut Djajoesman (1976:50) bahwa secara harfia lalu lintas diartikan sebagai gerak (bolak balik) manusia atau barang dari satu tempat ke tempat lainnya dengan menggunakan sarana jalan umum. Sedangkan menurut Poerwadarminta dalam kamus umum bahasa Indonesia (1993:55) menyatakan bahwa lalu lintas adalah berjalan bolak balik, hilir mudik dan perihal perjalanan di jalan dan sebagainya serta berhubungan antara sebuah tempat dengan tempat lainnya. Sehingga dapat disimpulkan bahwa lalu lintas adalah gerak/pindahnya manusia, hewan, atau barang dari satu tempat ke tempat lain di jalan dengan menggunakan alat gerak.

Berdasarkan beberapa uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa lalu lintas dalam arti luas adalah setiap hal yang berhubungan dengan sarana jalan umum sebagai sarana utama untuk tujuan yang ingin dicapai. Selain dapat ditarik kesimpulan juga pengertian lalu lintas dalam arti sempit yaitu hubungan antar manusia dengan atau tanpa disertai alat penggerak dari satu tempat ke tempat lain dengan menggunakan jalan sebagai ruang geraknya.

Manajemen lalu lintas berdasarkan Undang-Undang No. 22 Tahun 2009 tentang Lalu Lintas dan Angkutan Jalan didefinisikan sebagai serangkaian usaha dan kegiatan yang meliputi perencanaan, pengadaan, pemasangan, pengaturan, dan pemeliharaan fasilitas perlengkapan Jalan dalam rangka mewujudkan, mendukung dan memelihara keamanan, keselamatan, ketertiban, dan kelancaran Lalu Lintas.

2. Lampu Lalu Lintas

Menurut UU No. 22 Tahun 2009 Tentang Lalu lintas dan Angkutan Jalan, alat pemberi isyarat lalu lintas atau APILL adalah lampu yang mengendalikan arus lalu lintas yang terpasang di persimpangan jalan, tempat penyeberangan pejalan kaki (*zebra cross*), dan tempat arus lalu lintas lainnya. Lampu ini yang menandakan kapan kendaraan harus berjalan dan berhenti secara bergantian dari berbagai arah. Pengaturan lalu lintas di persimpangan jalan dimaksudkan untuk mengatur pergerakan kendaraan pada masing-masing kelompok pergerakan kendaraan agar dapat bergerak secara bergantian sehingga tidak saling mengganggu antar-arus yang ada.

Lampu lalu lintas memiliki banyak variasi, tergantung dari budaya negara yang menggunakannya dan kebutuhan khusus di perempatan tertentu. Contoh variasinya adalah lampu lalu lintas khusus pejalan kaki, lampu lalu lintas untuk pengguna sepeda, bus, kereta, dan lain-lain. Urutan lampu yang terpasang juga dapat berbeda-beda. Selain itu, ada banyak aturan dalam pengaturan lampu lalu lintas. Semua variasi lampu lalu lintas ini bisa saja dioperasikan bersamaan pada perempatan yang kompleks. Misalnya saja pada perempatan yang kompleks yang ramai dilewati para pejalan kaki dan kendaraan roda empat. Di sisi lain, jika lampu pejalan kaki berwarna hijau menyala, maka mobil harus berhenti, karena secara otomatis lampu lalu lintas untuk kendaraan akan berwarna merah jika lampu pejalan kaki berwarna hijau.

Lampu lalu lintas dioperasikan dengan menggunakan mesin atau listrik. Lampu lalu lintas berfungsi dalam mengarahkan lalu lintas untuk berhenti atau terus berjalan. Ada dua jenis lampu lalu lintas berdasarkan cara pengoperasiannya, yaitu :

a. Sinyal waktu tetap (*fixed time signals*)

   Lampu dioperasikan berdasarkan pada suatu program yang sebelumnya telah ditetapkan dalam durasi yang tetap. Lampu ini dilengkapi dengan saklar waktu untuk mengubah pengaturannya pada periode tertentu untuk mengatsi kondisi lalu lintas yang berbeda.

b. Sinyal yang diaktifkan oleh kendaraan (*demand signals*)

   Untuk mendeteksi jumlah kendaraan yang masuk pada jarak beberapa meter memerlukan detektor yang dihubungkan dengan suatu kontroler. Dengan terhubungnya detektor dan kontroler , maka kontroler akan mengatur waktu siklus dan merubah sinyal dalam memberikan respon pada permintaan lalu lintas. Tingkat kecanggihannya tergantung pada kompleksitas kontroler, jumlah dan jenis informasi detektor.

Jenis lampu lalu lintas berdasarkan berdasarkan cakupannya :

a. Lampu lalu lintas terpisah : pengoperasian lampu lalu lintas yang pemasangannya didasarkan pada suatu tempat persimpangan saja tanpa mempertimbangkan persimpangan lain.
b. Lampu lalu lintas terkoordinasi : pengoperasian lampu lalu lintas yang pemasangannya mempertimbangakan beberapa persimpangan yang terdapat pada arah tertentu.
c. Lampu lalu lintas jaringan : pengoperasian lampu lalu lintas yang pemasangannya mempertimbangkan beberapa persimpangan yang terdapat dalam suatu jaringan yang masih dalam satu kawasan.

3. Penentuan Waktu Lampu Lalu Lintas

Penentuan waktu lampu lalu lintas merupakan wewenang dari Dinas Perhubungan Komunikasi dan Informatika (Dishubkominfo) masing-masing daerah. Pengaturan waktu lampu lalu lintas memperhatikan beberapa faktor yang dapat mempengaruhi waktu lampu lalu lintas di suatu persimpangan, salah satu yang perlu diperhatikan adalah pertemuan arus kendaraan pada persimpangan sehingga perlu adanya pembagian waktu berjalan masing-masing simpang atau disebut pengaturan fase. Menurut Bernaldy (1997: 25), pengaturan fase membutuhkan waktu jeda antar fase yang disebut dengan waktu antar hijau *(intergreen)*, yang terdiri dari :

a. Waktu kuning

   Penentuan waktu kuning biasanya ditetapkan sebesar 3 detik untuk mengakomodasi ketika terjadi kedipan mata. Waktu kuning untuk memberikan peringatan pada pengemudi untuk segera berhenti.

b. Waktu semua merah

   Waktu ini untuk memberikan waktu pengosongan atau fase *clear* agar akhir arus kendaraan pada fase sebelumnya tidak berbenturan dengan awal arus kendaraan pada fase berikutnya.

Menurut Bernaldy (1997: 59), penghitungan waktu lampu lalu lintas dihitung dengan cara menentukan waktu siklus dahulu kemudian waktu hijau masing-masing fase. Waktu siklus adalah jumlah waktu hijau ditambah dengan jumlah waktu antar hijau pada suatu persimpangan.

$$c = \frac{1{,}5 \times LTI + 5}{1 - \sum FR_{crit}}$$

dengan :

c = Waktu siklus sinyal (detik)

LTI = Waktu hilang per siklus atau jumlah waktu antar hijau (detik)

FR = Arus lalu lintas dibagi dengan arus jenuh. Arus jenuh merupakan arus lalu lintas yang dapat ditampung oleh lebar persimpangan.

FR_{crit} = Nilai FR tertinggi dari semua pendekat yang berangkat pada suatu fase sinyal. Pendekat adalah daerah dari lengan persimpangan jalan untuk kendaraan mengantri di belakang garis henti.

$\sum FR_{crit}$ = Rasio Arus Simpang

= Jumlah FR_{crit} dari semua fase pada siklus tersebut.

Waktu siklus yang rendah akan menyulitkan pejalan kaki untuk menyebrangi jalan di persimpangan, sedangkan waktu siklus yang tinggi akan menyebabkan antrian kendaraan semakin panjang dan menambah waktu tundaan, sehingga kapasitas jalan di persimpangan akan berkurang. Langkah selanjutnya yaitu menentukan waktu lampu hijau menyala seperti pada cara berikut ini.

$$g_i = \frac{(c - LTI) \times FR_{crit}}{\sum FR_{crit}}$$

dengan :

g_i = Tampilan waktu lampu hijau pada fase i (detik)

H. Program *Matlab*

Menurut Iqbal (2009:2) *Matlab* adalah sebuah bahasa dengan kinerja tinggi untuk komputasi masalah teknik. *Matlab* mengintegrasikan komputasi, visualisasi, dan pemrograman dalam suatu model yang sangat mudah untuk pakai dimana masalah-masalah dan penyelesaiannya diekspresikan dalam notasi matematika yang familiar.

Nama *Matlab* merupakan singkatan dari *matrix laboratory*. Dalam lingkungan perguruan tinggi teknik, *Matlab* merupakan perangkat standar untuk memperkenalkan dan mengembangkan penyajian materi matematika, rekayasa dan kelimuan. Di industri, *Matlab* merupakan perangkat pilihan untuk penelitian dengan produktifitas yang tinggi, pengembangan dan analisanya. Fitur-fitur *Matlab* sudah banyak dikembangkan, dan lebih kita kenal dengan nama *toolbox*.

Matlab mempunyai berbagai jendela tampilan yang bermacam macam seperti berikut ini :

1. *Matlab Command Window*

Matlab Command Window adalah jendela yang muncul ketika kita akan membuka pertama kali setiap kita menjalankan aplikasi *Matlab*. Pada jendela tampilan ini kita dapat melakukan akses-akses ke command-command *Matlab* dengan cara mengetikkan algoritma-algoritma pada *Matlab*, seperti mengakses help window dan lain-lainnya. Command Window (layar perintah) dapat kita gunakan untuk menjalankan program/perintah yang dibuat pada jendela tampilan editor matlab.

2. *Matlab Editor/Debugger* (Editor M-File/Pencarian Kesalahan)

Jendela ini adalah alat yang disediakan oleh *Matlab* versi 5 ke atas. Berfungsi sebagai editor script *Matlab* (M-file). Walaupun sebenarnya script ini untuk pemrograman *Matlab* dapat saja menggunakan editor yang lain seperi notepad, notepad ++, maupun word.

Untuk mengakses jendela tampilan m-file ini dapat kita lakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Pilih menu File - kemudian pilih New

b. Pilih m-file, maka *Matlab* akan menampilkan *editor window*

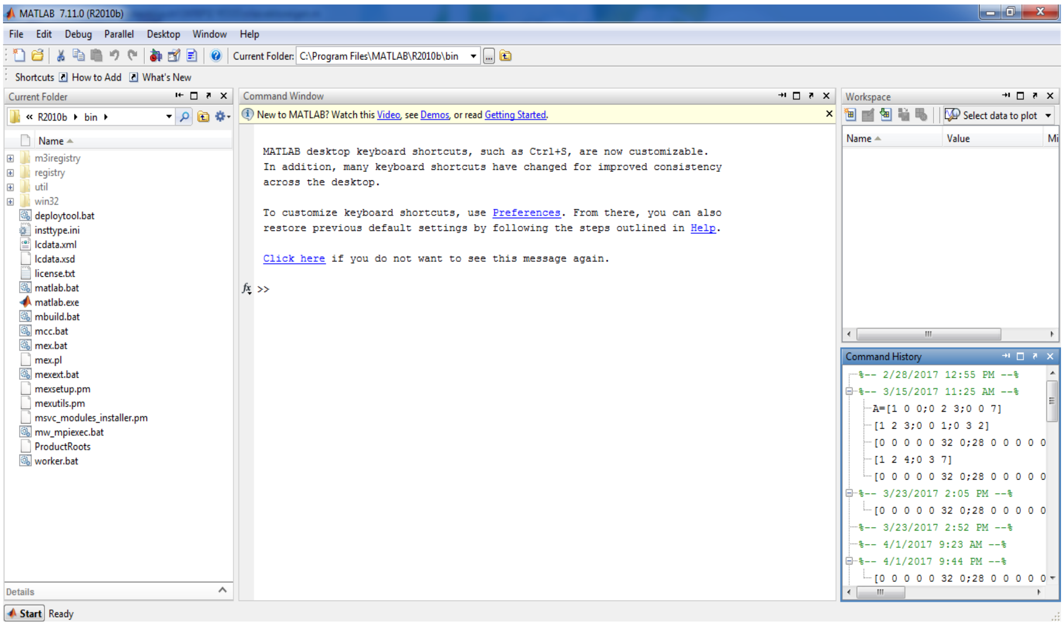
3. *Figure Windows*

Jendela tampilan ini merupakan hasil visualisasi dari script *Matlab*. Namun *Matlab* memberi kemudahan bagi programmer untuk mengedit jendela tampilan ini sekaligus memberikan program khusus untuk itu. Sehingga jendela tampilan ini selain berfungsi sebagai visualisasi output dapat juga sekaligus menjadi media input yang interaktif.

4. *Matlab* Help Window

Matlab juga menyediakan sistem *help* yang dapat diakses dengan perintah *help*. Misalnya, untuk memperoleh informasi tentang fungsi *elfun, if, for* yang merupakan bagian dari fungsi untuk trigonometri, eksponensial, kompleks dan lain-lain.

Tampilan awal dari program *Matlab* seperti pada Gambar 2.3 berikut ini.



Gambar 2.3 Tampilan Awal Program *Matlab*